4Л

УДК 519.6

О.М. Литвин, Л.С. Лобанова
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна
academ@kharkov.ua, ludmila_lobanova@mail.ru

Математичне моделювання процесів за допомогою інтерполяційних сплайнів, ортогональних на відрізку [-1,1]

У роботі запропонований метод побудови у явній формі множини сплайнів першого порядку, неперервних і ортогональних на відрізку [-1,1], а також досліджується питання про наближення функцій однієї змінної за їх допомогою. Наведені формули для парних та непарних сплайнів із заданою кількістю вузлів, таблиці вузлів та нулів отриманих сплайнів. Запропонований метод можна буде використати для математичного моделювання та дослідження процесів різної природи.

Вступ

Сплайн-функції – це розділ теорії наближення функцій і чисельного аналізу, який швидко розвивається. Поряд з ортогональними системами функцій [1], [2] сплайни широко використовуються в обчислювальній математиці та інженерній практиці.

Визначальна роль сплайнів в теорії наближення функцій привела до появи великої кількості публікацій, присвячених сплайнам [3], [4]. Серед ортогональних кусково-лінійних сплайнів найбільш відомою є система лінійних сплайнів Франкліна, яка отримується застосуванням процесу ортогоналізації Шмідта на відрізку [0,1] до системи Фабера – Шаудера, побудованої за допомогою множини двоїчно раціональних точок відрізку [0,1]; в цьому випадку система Фабера – Шаудера з точністю до сталих множників збігається з системою $\left\{1, \int\limits_0^1 \chi_n(x)dx\right\}$, де $\left\{\chi_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ є системою Хаара [5], [6]. Ортонормована система неперервних функцій Франкліна не має явного виразу для елементів системи, як це є в ортогональних системах Хаара, Уолша і Радемахера для кусково-сталих сплайнів. Незважаючи на це, залишається відкритим питання про побудову і використання сплайнів, ортогональних на заданому відрізку. В роботі [7] побудовані ортогональні на відрізку [-1,1] сплайни степеня n, які мають розривну похідну $k+1$-го порядку

$$P_{n,k}\left(x\right)=\frac{\left(n+k\right)!}{\left(2n\right)!}\frac{1}{x^k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[x^{n+k}\left(\left|x\right|-1\right)^{n-k}\right],\ k=\overline{0,n-1}.$$

У роботі [8] автори запропонували алгоритм побудови ортогональних на відрізку [-1,1] сплайнів та дослідили деякі їх властивості. У цій роботі розглядається загальний метод побудови неперервних ортогональних сплайнів n-го порядку на рівномірній сітці $x_k=-1+2k/m,\ k=\overline{0,m}$. В основі такої побудови лежать поліноми Лежандра $P_n\left(x\right)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right],\ n=0,1,\ldots$, які є ортогональними на відрізку

$\left[-1,1\right]$. Алгоритм побудови системи сплайнів степеня n, ортогональних і неперервних на відрізку $\left[-1,1\right]$, визначається формулами

$$\overline{P}_{n,m}\left(t\right)=P_{n,-1+\frac{2(k-1)}{m},-1+\frac{2k}{m}}\left(t\right),\ t\in\left[-1+2\left(k-1\right)/m,-1+2k/m\right],\ k=\overline{1,m},\ n=2n',n'\in N,$$

$$\overline{P}_{n,m}\left(t\right)=\left(-1\right)^{k-1}P_{n,-1+\frac{2(k-1)}{m},-1+\frac{2k}{m}}\left(t\right),\ t\in\left[-1+2\left(k-1\right)/m,-1+2k/m\right],\ k=\overline{1,m},\ n=2n'-1,\ n'\in N.$$

Наближення функцій скінченними сумами цих сплайнів здійснюється за формулами

$$S_{n,m}f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{m}C_k\left(f\right)P_{n,k}\left(x\right),\quad C_k\left(f\right)=\frac{1}{\left\|P_{n,k}(x)\right\|^2}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_{n,k}\left(x\right)dx\,.$$

У роботі [4] досліджуються сплайн-вейвлети степеня n. В основі їх побудови лежить використання однієї функції – вейвлета $\psi\left(x\right)$, яка дозволяє побудувати ортогональну вейвлет-систему на базі системи $\psi_{j,k}\left(x\right)=2^{j/2}\psi\left(2^j x-k\right),\ j,k\in Z$.

Отже, залишається актуальним питання про розробку і використання сплайнів, ортогональних на заданому відрізку, та математичних моделей на їх основі.

Постановка задачі

Нехай досліджуваний процес описується функцією однієї змінної $f(x)$ на відрізку [-1,1]. **Метою даної роботи** є побудова у явній формі множини сплайнів першого порядку, неперервних та ортогональних на відрізку [-1,1], а також математичної моделі на їх основі досліджуваного процесу.

Побудова інтерполяційних сплайнів, неперервних та ортогональних на відрізку [-1,1]

Припустимо, що $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$, а $P_k(x)\ (k=2,3,\ldots)$ має $k-1$ вузлів $x_{k,i}\ (i=\overline{1,k-1})$, розташованих симетрично відносно початку координат, і є лінійною функцією на кожному з інтервалів $(-1,x_{k,1}),(x_{k,1},x_{k,2}),\ldots,(x_{k,k-1},1)$, яка на кінцях цих інтервалів приймає по черзі значення ±1, і $P_k(-1)=-1\ (k=1,2,3,\ldots)$. Окрім цього, за побудовою

$$P_{2k}(-x)=P_{2k}(x),\ P_{2k-1}(-x)=-P_{2k-1}(x),\ (k=1,2,3\ldots)\ ,$$

тобто множина $\left\{P_n(x)\right\}$ містить в собі парні і непарні сплайни; при цьому парні сплайни мають непарну кількість вузлів, і навпаки, непарні мають парну кількість вузлів. Для визначення цих вузлів використаємо умову ортогональності сплайна $P_k(x)\ (k=2,3,\ \ldots)$ до попередніх сплайнів $P_{k-j}(x)\ (j=1,2,\ldots,k-1)$:

$$\int_{-1}^{1}P_{2k-1}(x)P_j(x)dx=0,\ \ k=2,3,\ldots,\quad j=1,3,\ldots,2k-3 \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{1} P_{2k}(x)P_j(x)dx = 0,\ \ k = 1,2,3,...,\quad j = 0,2,...,2k-2\ . \tag{2}$$

Умови (1) або (2) приводять до системи $k-1$ рівнянь з $k-1$ невідомими.

Теорема 1. Система $\{P_k(x),\ k = 0,1,2,3,...\}$, де $P_k(x)$ визначаються формулами

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,$$

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{2}{x_1^{(2n)}}|x| + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n+i}\frac{x_{i+1}^{(2n)} - x_{i-1}^{(2n)}}{(x_{i+1}^{(2n)} - x_i^{(2n)})(x_i^{(2n)} - x_{i-1}^{(2n)})}(|x - x_i^{(2n)}| + |x + x_i^{(2n)}|)\ + \frac{1 + x_{n-1}^{(2n)}}{1 - x_{n-1}^{(2n)}},$$

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^{n-1}\frac{x_1^{(2n+1)} + x_2^{(2n+1)}}{2x_1^{(2n+1)}(x_2^{(2n+1)} - x_1^{(2n+1)})}(|x - x_1^{(2n+1)}| - |x + x_1^{(2n+1)}|) + \tag{3}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n+i}\frac{x_{i+1}^{(2n+1)} - x_{i-1}^{(2n+1)}}{(x_{i+1}^{(2n+1)} - x_i^{(2n+1)})(x_i^{(2n+1)} - x_{i-1}^{(2n+1)})}(|x - x_i^{(2n+1)}| - |x + x_i^{(2n+1)}|)\cdot + \frac{2x}{1 - x_n^{(2n+1)}},$$

$$n = 1,2,3,...;\ x_0^{(2n)} = 0,\ x_n^{(2n)} = 1,\ x_{n+1}^{(2n+1)} = 1$$

є ортогональним базисом сплайнів першого степеня на відрізку [-1,1] з симетрично розташованими вузлами.

Для отримання формул (3) скористались тим фактом, що функцію

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & -\infty < x \le a_1 \\ f_2(x), & a_1 < x \le a_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ f_{n+1}(x), & a_n < x < \infty \end{cases}$$

можна записати єдиним аналітичним виразом [9]

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f_1(x) + f_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{f_{i+1}(x) - f_i(x)}{x - a_i}|x - a_i|\right).$$

Наведемо кілька побудованих неперервних ортогональних на відрізку $[-1,1]$ сплайнів:

$$P_2(x) = 1 - 2|x|,$$

$$P_3(x) = \frac{2x}{1 - x_1^{(3)}} + \frac{1 + x_1^{(3)}}{2x_1^{(3)}\left(1 - x_1^{(3)}\right)}\left(|x - x_1^{(3)}| - |x + x_1^{(3)}|\right),$$

$$P_4(x) = \frac{2|x|}{x_1^{(4)}} - \frac{1}{x_1^{(4)}\left(1 - x_1^{(4)}\right)}\left(|x - x_1^{(4)}| + |x + x_1^{(4)}|\right) + \frac{1 + x_1^{(4)}}{1 - x_1^{(4)}},$$

$$P_7(x) = \frac{2x}{1 - x_3^{(7)}} + \frac{x_1^{(7)} + x_2^{(7)}}{2x_1^{(7)}\left(x_2^{(7)} - x_1^{(7)}\right)}\left(|x - x_1^{(7)}| - |x + x_1^{(7)}|\right) -$$

$$-\frac{x_3^{(7)} - x_1^{(7)}}{\left(x_3^{(7)} - x_2^{(7)}\right)\left(x_2^{(7)} - x_1^{(7)}\right)}\left(|x - x_2^{(7)}| - |x + x_2^{(7)}|\right) +$$

$$+\frac{1-x_2^{(7)}}{\left(1-x_3^{(7)}\right)\left(x_3^{(7)}-x_2^{(7)}\right)}\left(|x-x_3^{(7)}|-|x+x_3^{(7)}|\right),$$

$$P_{10}(x)=-\frac{2|x|}{x_1^{(10)}}+\frac{x_2^{(10)}}{x_1^{(10)}\left(x_2^{(10)}-x_1^{(10)}\right)}\left(|x-x_1^{(10)}|+|x+x_1^{(10)}|\right)-$$

$$-\frac{x_3^{(10)}-x_1^{(10)}}{\left(x_3^{(10)}-x_2^{(10)}\right)\left(x_2^{(10)}-x_1^{(10)}\right)}\left(|x-x_2^{(10)}|+|x+x_2^{(10)}|\right)+$$

$$+\frac{x_4^{(10)}-x_2^{(10)}}{\left(x_4^{(10)}-x_3^{(10)}\right)\left(x_3^{(10)}-x_2^{(10)}\right)}\left(|x-x_3^{(10)}|+|x+x_3^{(10)}|\right)-$$

$$-\frac{1-x_3^{(10)}}{\left(1-x_4^{(10)}\right)\left(x_4^{(10)}-x_3^{(10)}\right)}\left(|x-x_4^{(10)}|+|x+x_4^{(10)}|\right)+\frac{1+x_4^{(10)}}{1-x_4^{(10)}}.$$

(на рис. 1 наведені графіки сплайнів $P_k(x)$, $k=\overline{2,5}$).

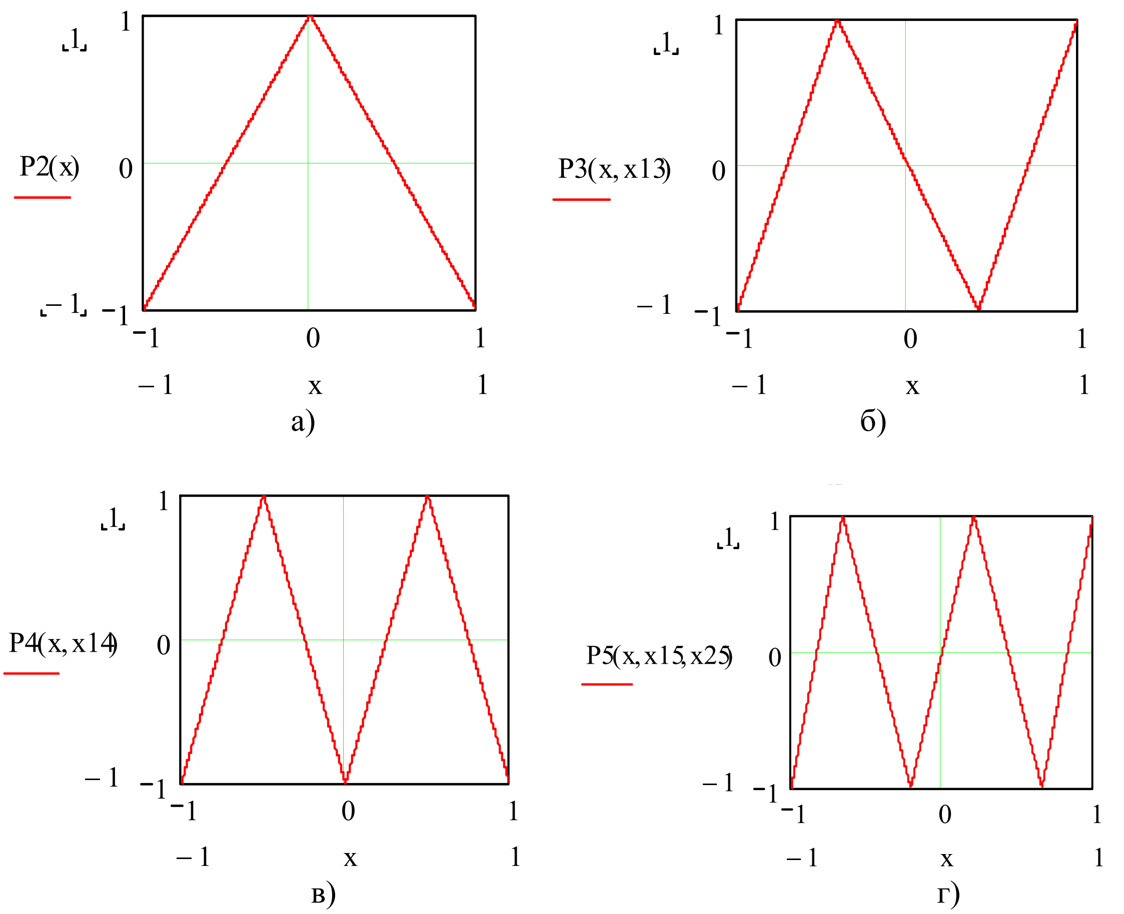


Рисунок 1 – Графічний вигляд побудованих ортогональних на $[-1,1]$ сплайнів: а) $P_2(x)$, б) $P_3(x)$, в) $P_4(x)$, г) $P_5(x)$

У табл. 1 наведено вузли для $P_k(x)$, $k=\overline{3,10}$; з урахуванням симетрії наведено тільки додатні значення вузлів. Зазначимо, що вузлом всіх парних сплайнів є ще $x=0$.

Таблиця 1 – Додатні вузли $x_k^{(i)}$ неперервних сплайнів, ортогональних на відрізку [–1,1]

Сплайн $P_i(x)$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$x_4^{(i)}$
$P_3(x)$	0,41421356			
$P_4(x)$	0,50000000			
$P_5(x)$	0,20941904	0,66018307		
$P_6(x)$	0,29289322	0,70710678		
$P_7(x)$	0,18490285	0,45473964	0,73143555	
$P_8(x)$	0,25000000	0,50000000	0,75000000	
$P_9(x)$	0,12 971475	0,34317942	0,56565177	0,82608452
$P_{10}(x)$	0,16990846	0,39529048	0,60470952	0,83009154

У табл. 2 наведено невід'ємні нулі для тих же сплайнів. Зауважимо, що сплайн $P_k(x)$ має k нулів, що розташовані симетрично відносно початку координат; модулі їх обчислюються за формулами:

$$\xi_1=0,\quad \xi_2=\frac{x_1^{(2n-1)}+x_2^{(2n-1)}}{2},\quad \xi_3=\frac{x_2^{(2n-1)}+x_3^{(2n-1)}}{2},\ldots,$$

$$\xi_{n-1}=\frac{x_{n-2}^{(2n-1)}+x_{n-1}^{(2n-1)}}{2},\quad \xi_n=\frac{x_{n-1}^{(2n-1)}+1}{2}$$

для непарного сплайна $P_{2n-1}(x)$ і

$$\xi_1=\frac{x_1^{(2n)}}{2},\quad \xi_2=\frac{x_1^{(2n)}+x_2^{(2n)}}{2},\quad \xi_3=\frac{x_2^{(2n)}+x_3^{(2n)}}{2},\ldots,$$

$$\xi_{n-1}=\frac{x_{n-2}^{(2n)}+x_{n-1}^{(2n)}}{2},\quad \xi_n=\frac{x_{n-1}^{(2n)}+1}{2}$$

для парного сплайна $P_{2n}(x)$ $(n=2,3,4,...)$.

Сплайн $P_1(x)$ має лише один нуль $k_1=0$, а нулями $P_2(x)$ є $k_1=-0.5,\ k_2=0.5$.

Теорема 2. Розклад $f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_kP_k(x)$, $C_k=\frac{1}{\|P_k(t)\|^2}\int_{-1}^{1}f(t)P_k(t)dt$ дає найкраще наближення функції $f(x)\in L_2[-1,1]$ множиною $\{P_k(x)\}$ в нормі $L_2[-1,1]$, тобто

$$\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kP_k(x)\right]^2dx\to\min_{a_k}\Rightarrow a_k=C_k.$$

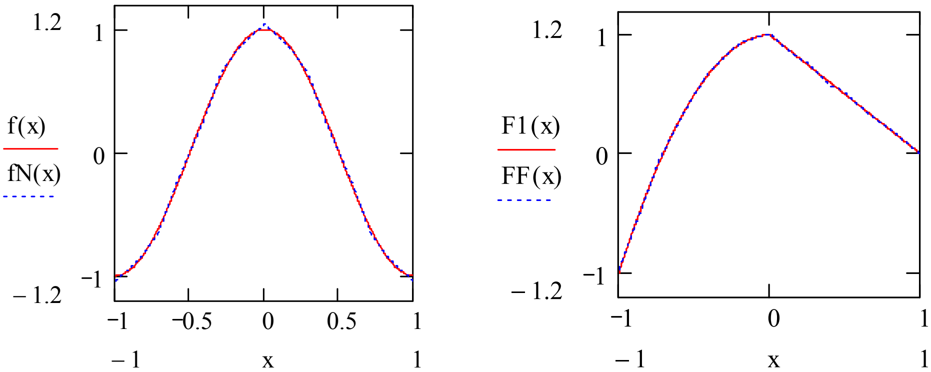
Зауважимо, що безпосередніми обчисленнями отримуємо

$$\|P_0(x)\|^2=2,\ \|P_k(x)\|^2=\frac{2}{3},k\geq 1.$$

Таблиця 2 – Невід'ємні нулі ортогональних сплайнів

Сплайн $P_i(x)$	$\xi_1^{(i)}$	$\xi_2^{(i)}$	$\xi_3^{(i)}$	$\xi_4^{(i)}$	$\xi_5^{(i)}$
$P_1(x)$	0,00000000				
$P_2(x)$	0,50000000				
$P_3(x)$	0,00000000	0,70710678			
$P_4(x)$	0,25000000	0,75000000			
$P_5(x)$	0,00000000	0,43480106	0,83009154		
$P_6(x)$	0,14644661	0,50000000	0,85355339		
$P_7(x)$	0,00000000	0,31982125	0,59308760	0,86571778	
$P_8(x)$	0,12500000	0,37500000	0,62500000	0,87500000	
$P_9(x)$	0,00000000	0,23644709	0,45441559	0,69586814	0,91304226
$P_{10}(x)$	0,08495423	0,28259947	0,50000000	0,71740053	0,91504577

Як приклад, на рис. 2 наведені криві, які демонструють якість наближення функцій $f(x)=\cos(\pi x)$ та $F1(x)=\begin{cases}1-2x^2, -1\le x\le 0\\ 1-x, \quad 0\le x\le 1\end{cases}$ за допомогою побудованої системи ортогональних сплайнів.



а) б)

Рисунок 2 – Графічний вигляд функцій: а) $f(x)$, б) $F1(x)$ – та їх наближення за допомогою побудованої системи ортогональних сплайнів

Висновки

Таким чином, у даній роботі запропоновано і досліджено явні формули для системи базисних сплайнів першого порядку, ортогональних на відрізку [-1,1], задані у вигляді єдиного аналітичного виразу. Запропонований метод можна буде використати для математичного моделювання та дослідження процесів різної природи. Наступним кроком в роботі авторів в цьому напрямку планується розробка загальної теорії базисних сплайнів n-го порядку $(n\ge 2)$.

Література

1. Качмаж С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. – М., 1958.
2. Кашин Б.С. Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян. – М. : Наука, 1984. – 496 с.

3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
4. Чуи Ч.К. Введение в вэйвлеты / Чуи Ч.К. ; пер. с англ. – М. : Мир, 2001. – 412 с.
5. Franklin P. Math. Ann. / P. Franklin. – 1928. – Bd. 100. – S. 522-529.
6. Haar A. Math. Ann. / A. Haar. – 1910. – Bd. 69, 8. – S. 331-371.
7. Литвин О.М. О приближении функций, существенно принадлежащих классу $C^k[-1,1]$ / О.М. Литвин, В.В. Паршин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1971. – № 9. – С. 21-23.
8. Литвин О.М. Ортогональні сплайни класу $C[-1,1]$ / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова // Доп. АН України. – 1997. – № 1. – С. 31-33.
9. Литвин О.М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О.М. Литвин, В.Л. Рвачов. – К. : Наук. думка, 1973. – 122 с.

Literatura

1. Kachmazh S. Teorija ortogonal'nyh rjadov. M. 1958.
2. Kashin B.S. Ortogonal'nyer jady. M.: Nauka. 1984. 496 s.
3. Zav'jalov Ju.S. Metody splajn-funkcij. M.: Nauka. 1980. 352 s.
4. Chui Ch. K. Vvedenie v vjejvlety. M.: Mir. 2001. 412 s.
5. Franklin P. Math. Ann. Bd. 100. 1928. S. 522-529.
6. Haar A. Math. Ann. Bd. 69, 8. 1910. S. 331-371.
7. Litvin O.M. Dokl. AN USSR. Ser. A. 1971. № 9. S. 21-23.
8. Litvin O.M. Dop. AN Ukrainy. 1997. № 1. S. 31-33.
9. Litvin O.M. Klasychna formula Tejlora, ïï uzagal'nennja ta zastosuvannja. K.: Nauk. dumka, 1973. 122 s.

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова

Математическое моделирование процессов с помощью интерполяционных сплайнов, ортогональных на отрезке [-1,1]

В работе предложен метод построения в явной форме множества сплайнов первого порядка, непрерывных и ортогональных на отрезке [-1,1], а также исследуется вопрос о приближении функций одной переменной с их помощью. Приведены формулы для четных и нечетных сплайнов с заданным количеством узлов, таблицы узлов и нулей полученных сплайнов. Предложенный метод может быть использован для математического моделирования процессов различной природы.

O.N. Lytvyn, L.S. Lobanova

Mathematical Modeling of Processes by Orthogonal on [-1,1] Interpolation Splines

The method for obvious formed construction of set of continuous and orthogonal on [-1,1] splines of the first degree is offered, and approximation of functions of one variable by these splines is also investigated. The formulas for even and odd splines with the fixed quantity of nodes, tables of nodes and zeros of the received splines are given. The offered method can be used for mathematical modeling of processes of the various nature.

Стаття надійшла до редакції 22.06.2011.